

المدة : 03 ساعات و نصف

إختبار في مادة : الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقط)

عين الإقتراح الصحيح الوحيد من بين الإقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية ، مع التبرير:

$x_i$	-2	0	1	3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$

1. قانون إحتمال المتغير العشوائي  $X$  معرف بالجدول المقابل:

الأمل الرياضي  $E(X)$  للمتغير العشوائي  $X$  هو أ)  $-\frac{1}{20}$  ب)  $-\frac{1}{10}$  ج)  $-\frac{3}{20}$

2. إذا كانت الأعداد  $(1 - e^{-2})$ ،  $(e^{-2} - e^{-4})$ ،  $\alpha$  تشكل حدودا متتابعة لمتتالية هندسية، فإن  $\alpha$  تساوي:

أ)  $(1 - e^{-4})$  ب)  $(e^{-4} - e^{-6})$  ج)  $(e^{-2} - e^{-6})$

3. الدالة  $F: x \rightarrow \ln(2x + 4)$ ، هي دالة أصلية على المجال  $[0; +\infty[$  للدالة  $f$  المعرفة بـ:

أ)  $\frac{\ln(2x + 4)}{2}$  ب)  $f(x) = \frac{1}{x + 2}$  ج)  $f(x) = \frac{1}{2x + 4}$

التمرين الثاني: (04 نقط)

تحتوي علبة على مجموعة من القريصات، نصف القريصات سوداء (N) وثلاثها خضراء (V) وسدسها صفراء (J).  
75% من القريصات السوداء و 50% من القريصات الخضراء و 25% من القريصات الصفراء شكلها دائري (O). أما بقية القريصات فشكلها مربع (S)  
نسحب قريصة واحدة من العلبة.

(1) شكل شجرة الاحتمالات التي تنمذج الوضعية.

(2) احسب الاحتمالات التالية:

الحدث A: "القريصة المسحوبة خضراء دائرية"

الحدث B: "القريصة المسحوبة سوداء مربعة"

الحدث C: "القريصة المسحوبة دائرية"

(3) إذا سحبنا قريصة دائرية الشكل، فما هو احتمال أن تكون خضراء؟

4) نفرض أن مجموع القريصات في العلبة هو 24 قريصة.  
 (أ) أكمل الجدول التالي:

الشكل \ اللون	N	V	J	المجموع
O				
S				
المجموع				24

(ب) نسحب في آن واحد ثلاث قريصات من العلبة.

- احسب  $P(E)$  احتمال ان تكون القريصات المسحوبة من نفس الشكل
- احسب  $P(F)$  احتمال أن تكون القريصات المسحوبة من نفس اللون
- إذا كانت القريصات المسحوبة من نفس الشكل، فما هو احتمال أن تكون من نفس اللون؟

التمرين الثالث: (05 نقط)

المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرّفة بـ:  $u_0 = 2$  ، ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$  .

1. احسب  $u_1, u_2, u_3$  ثم خمن اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$

2. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n \leq n + 3$

3. (أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$

(ب) استنتج اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$

4.  $(v_n)$  متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_n = u_n - n$

(أ) برهن أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $\frac{2}{3}$  ، ثم أكتب  $v_n$  و  $u_n$  بدلالة  $n$  .

(ب) استنتج  $\lim u_n$

(ج) احسب بدلالة  $n$  :  $S_n = v_0^2 + v_1^2 + \dots + v_{n-1}^2$

التمرين الرابع: (07 نقط)

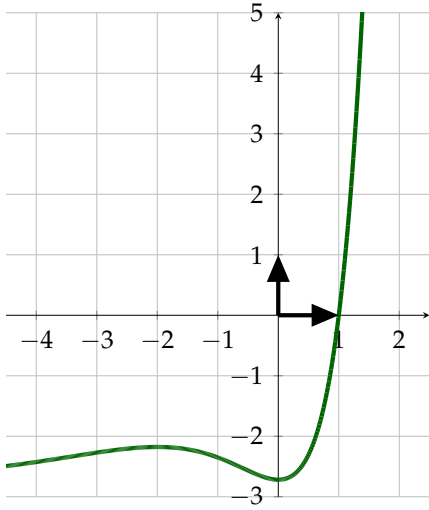
(I) الدالة العددية  $g$  معرّفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $g(x) = x^2 e^x - e$

وليكن  $(C_g)$  التمثيل البياني لـ  $g$  في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (تؤخذ وحدة الطول  $2cm$ )

1. احسب  $g(1)$ .

2. بقراءة بيانية، عين إشارة  $g(x)$  ثم استنتج حسب قيم  $x$  إشارة  $g(-x)$ .

(II) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  بـ:  $f(x) = e^{-x} - 2 - \frac{e}{x}$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .



1. احسب النهايات التالية:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ،  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  ،  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  وفسّر النتائج هندسياً.

2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم  $x$ :  $f'(x) = \frac{-g(-x)}{x^2}$ .

3. استنتج أن الدالة  $f$  متزايدة تماماً على المجالين  $]-1; 0[$  و  $]0; +\infty[$ ، و متناقصة تماماً على المجال  $]-\infty; -1]$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

4. بين أن المنحنى  $(Y)$  ذو المعادلة  $y = e^{-x} - 2$  و المنحنى  $(C_f)$  متقاربان بجوار  $+\infty$ ، ثم ادرس الوضع النسبي لهما.

5. بين كيف يمكن إنشاء  $(Y)$  انطلاقاً من منحنى الدالة  $e^x \rightarrow x$ ، ثم أنشء كلا من  $(Y)$  و  $(C_f)$  في المعلم السابق.

(III) احسب  $A$ ، مساحة الحيز المحدود ب  $(Y)$  و  $(C_f)$  والمستقيمتين  $x = e$  و  $x = e^2$ .

إنتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقط)

عين الإقتراح الصحيح الوحيد من بين الإقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية ، مع التبرير:

1. إذا كانت  $f$  حلاً للمعادلة التفاضلية  $y' = -2y$  و  $(C_f)$  يقطع حامل محور الترتيب عند  $\frac{3}{2}$  فإن مساحة الحيز المحدد

ب  $(C_f)$  والمستقيمتين  $y = 0$  و  $x = 0$  و  $x = \ln 3$  تساوي:

أ)  $\frac{2}{3}u.a$  (ب)  $\frac{3}{2}u.a$  (ج)  $\frac{1}{3}u.a$

2. يتكون فريق عمل من 4 إناث و 3 ذكور ، يراد تشكيل لجنة تضم 3 أعضاء.

إحتمال أن تكون اللجنة من الجنسين هو :

أ)  $\frac{6}{7}$  (ب)  $\frac{4}{7}$  (ج)  $\frac{1}{7}$

3. لتكن  $(u_n)$  متتالية هندسية أساسها  $e$  و حدها الأول  $u_0$  ، حيث  $u_0 = e^{-\frac{1}{2}}$  . (أساس اللوغاريتم النيبيري)

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  نضع:  $S_n = \ln(u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n)$

$S_n$  يساوي:

أ)  $\frac{n^2 - 1}{2}$  (ب)  $\frac{n^2 + 1}{2}$  (ج)  $\frac{n^2}{2}$

## التمرين الثاني: (04 نقط)

يحتوي كيس على أربع كريات حمراء تحمل الرقم  $\alpha$ ، وثلاث كريات خضراء تحمل الرقم  $\alpha - 1$ ، وكريتين بيضاويتين تحملان الرقم 1، حيث  $\alpha$  عدد طبيعي فير معدوم. الكريات متماثلة ولا تفرق بينها باللمس، نسحب عشوائيا من الكيس ثلاث كريات في آن واحد.

1. أ) احسب احتمال الأحداث  $A, B, C$ ، حيث:

الحدث  $A$ : "الحصول على كرية بيضاء على الأكثر"

الحدث  $B$ : "الحصول على ثلاث كريات تحمل نفس الرقم"

الحدث  $C$ : "الحصول على كريتين بالضبط تحملان الرقم  $\alpha - 1$ "

ب) بين أن احتمال الحصول على ثلاث كريات تحمل ألوان العلم الوطني هو  $\frac{2}{7}$ .

2. ليكن المتغير العشوائي  $X$  الذي يرفق بكل سحبة، مجموع الأرقام الظاهرة على الكريات المسحوبة الحمراء، و  $X = 0$  إذا لم تسحب كرية حمراء.

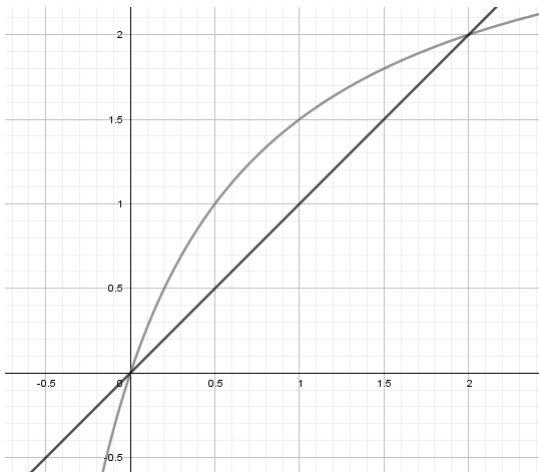
أ) برر أن مجموعة قيم  $X$  هي:  $X = \{0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha\}$

ب) عرف قانون احتمال المتغير العشوائي  $X$

ج) أحسب الأمل الرياضي بدلالة  $\alpha$ ، ثم عين قيم  $\alpha$  التي من أجلها  $|E(X)| \leq 2$

## التمرين الثالث: (05 نقط)

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  ب:  $f(x) = \frac{3x}{x+1}$  ونسمي  $(C_f)$  تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  كما في الشكل أدناه:



(I)  $(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة على  $\mathbb{N}$  كمايلي: 
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n}{u_n + 1} \end{cases}$$

1. أعد رسم الشكل على ورقتك، ثم باستعمال المنحنى  $(C_f)$

والمستقيم ذو المعادلة  $y = x$ ، مثل على محور الفواصل الحدود

الأربعة الأولى للمتتالية  $(u_n)$

(دون حسابها وموضحا خطوط الإنشاء)

2. ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  وتقاربها.

3. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $0 \leq u_n < 2$

4. أ) أثبت أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة، ثم استنتج أنها متقاربة.

ب) أوجد نهاية المتتالية  $(u_n)$

(II) نعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  ب:  $v_n = 1 - \frac{2}{u_n}$

1. برهن أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية، يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

2. اكتب عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$ ، ثم استنتج عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$ .

3. احسب  $\lim u_n$ .

4. اكتب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  حيث:  $S_n = \frac{u_0}{u_0 - 2} + \frac{u_1}{u_1 - 2} + \frac{u_2}{u_2 - 2} + \dots + \frac{u_n}{u_n - 2}$

التمرين الرابع: (07 نقط)

(I) الدالة العددية  $g$  معرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بـ:  $g(x) = 2\ln x - 1 - \frac{1}{x^2}$

1. بين أن الدالة  $g$  متزايدة تماما على المجال  $]0; +\infty[$

2. (أ) بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث:  $1.89 < \alpha < 1.9$

(ب) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي الموجب تماما  $x$  إشارة  $g(x)$

(II) الدالة العددية  $f$  المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بـ:  $f(x) = -x - 2 + \frac{3 + 2\ln x}{x}$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. (أ) احسب  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

(ب) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2. (أ) بين أنه من أجل كل  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$ :  $f'(x) = \frac{1}{x^2} g\left(\frac{1}{x}\right)$

(ب) بين أن الدالة  $f$  متزايدة تماما على المجال  $]0; \frac{1}{\alpha}]$ ، ومتناقصة تماما على المجال  $[\frac{1}{\alpha}; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3. (أ) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (-x - 2)$ ، ثم استنتج أن  $(C_f)$  يقبل مستقيما مقاربا  $(\Delta)$  يطلب كتابة معادلته.

(ب) ادرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(\Delta)$

4. (أ) بين أن  $(C_f)$  يقبل نقطة انعطاف  $A$  فاصلتها 1

(ب) اكتب معادلة المماس ل  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة 1

5. ارسم  $(\Delta)$ ،  $(T)$  و  $(C_f)$ ، (نأخذ  $\frac{1}{\alpha} \approx 0.53$  و  $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) \approx 0.73$ )

(III) بين أن  $A = 2\text{cm}^2$ ، حيث  $A$  هي مساحة الحيز المستوي المحدد ب  $(C_f)$  و  $(\Delta)$  و المستقيمين ذي المعادلتين  $x = 1$  و  $x = e^{-1}$ .

إنتهى الموضوع الثاني



إذ أنت لم تزرع و أبصرت حاصدا ❖❖ ندمت على التفريط في زمن البذر

بالتوفيق في شهادة البكالوريا ❖ أستاذة المادة: تشوك.هـ